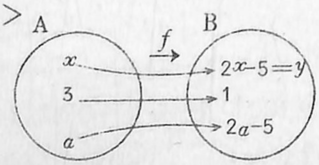
高等学校一年生の関数指導

新潟県立巻工業高等学校教諭　米　山　　昭

I　指導体系の概要

項・節	指導のねらいと主な内容
関　係 §1.　直積集合 （指導時数　1 h）	o　順序対を導入し，直積集合を定義することによって，2つの集合の元と元の結びつきで表わされる集合について理解させる。 (1)　順序づけられた集合の元の組（x，y）を順序対といい，xを第一成分，yを第二成分という。 （a，b）=（b，a）　$\rightleftharpoons$　$a=b$　（順序があること） （a，b）=（c，d）　$\rightleftharpoons$　$a=c$，$b=d$ (2)　順序対の集合｛（x，y）｜$x\in$A，$y\in$B｝をAとBの直積集合といい，A×Bで表わす。 (3)　A×Bのグラフ；　順序対（x，y）　$\leftrightarrow$　点（x，y） Re =｛実数｝　のとき，Re×Reのグラフ。
§2.　関係の考え （　2 h）	o　関係概念を順序対の集合として理解させる。また逆に，順序対の集合やグラフから2つの集合間の関係を見つけさせる。 (1)　関係は集合AとBの元と元を結びつける表現である。従って，ある関係Rは，その文章を満足する順序対の集合として考えられ，次のように表わせる。 R=｛（x，y）｜x——y，$x\in$A，$y\in$B｝ （x——yは関係を与える文章や表現） これをA×B上の関係Rといい，$\{x\}$をRの定義域（変域），$\{y\}$をRの値域，$\{x\}$の元xを変数という。 (2)　R$\subseteqq$A×B　　　(3)　Rのグラフ
§3.　関係の表わし方 （　2 h）	o　関係のいろいろな表現法やその特徴を知り，それらの結びつきを，理解させる。 (1)　A×B上の関係R；　1°　x——y　（関係を与える文） 2°　$\{(x,y)\mid x$——y，$x\in$A，$y\in$B$\}$ 3°　$\{(x_0, y_0)(x_1, y_1)(x_2, y_2)\cdots\}$ 4°　グラフ (2)　A×B上の関係Rは「AからBへの対応」を与える見方を導入し，対応図で表わす。

	(3) 1対1，多対1の対応を特に一意対応という。 (4) $\{y_1, y_2, y_3\cdots\cdots\}=B$ のとき，「上への対応」 $\{y_1, y_2, y_3\cdots\cdots\}<B$ のとき，「中への対応」という。 (5) 数学では，$A=B=\{$実数$\}$を考えることが殆んどである。
§ 3. いろいろな関係 （2h）	○ 逆，合成，同値，順序の考えを導入し，関係の特徴と集合の構造に対する理解をはかる。 (1) 逆関係R^{-1}は$A\times B$上の関係Rの逆の対応で，$B\times A$上の関係であり$R=\{(x,y)\mid x—y\}$に対して，$R^{-1}=\{(y,x)\mid x—y\}$ $=\{(x,y)\mid y—x\}$ となる。 (2) RとR^{-1}のグラフの特徴　(3) 合成；順序対の集合の$\cup$, $\cap$ (4) 同値関係　1° $(a, a)\in R$ 2° $(a, b)\in R \Longrightarrow (b, a)\in R$ 3° $(a, b)\in R, (b, c)\ R \Longrightarrow (a, c)\in R$ (5) 順序関係　○数の大小　○年上，年下
演習・テスト	演 習 (2)　テスト (1)
関 数 § 1. 関数の考え （3h）	○ 関数を関係の特に一意対応になる場合として把握し，ひいては関数概念を写像を中心として定義し，順序対の集合と写像との結びつきを理解させることにより，関数の考えを身につけさせる。 (1) 一意対応の関係　(2) 順序対の集合としての関数 (3) 対応の規則としての関数　(4) 関数記号 （詳細は実践例を参照）
§ 2. 関数の表現 （2h）	○ 関数の表現方法の特徴を理解し，必要に応じて適宜活用する能力を養い，併せて，関数の理解を深める。 (1) 順序対の列記　(2) 対応の規則と対応図　(3) グラフ (4) 解析的表示（式）；A，Bが実数の集合（部分集合）の場合， $A\times B$上の関数$f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$を単に$y=f(x)$と書く。 ＜例＞  $f;\ x\longrightarrow 2x-5\ (\fallingdotseq y)$ i.e. $f=\{(x,y)\mid y=2x-5\}$ これを $f(x)=2x-5$ や $y=2x-5$

§ 3. 関数の合成 (2h)	○ 写像の合成や逆の写像を導入し，合成関数や逆関数の意味を理解させ，関数についての理解を深める。 (1) 関数の相等　$f=g$ (2) 実数上の関数の和・差・積・商 $h(x)=f(x)\pm g(x)$　$h(x)=f(x)\cdot g(x)$ $h(x)=f(x)/g(x)$ (3) 合成関数 • g : A→B，f : B→C で $g : x\to y$，$f : y\to z$ のとき， $h : x\to z$ なる関数 h を f と g の合成関数といい $f\circ g$ で表わす。 $\therefore h(x)=f\circ g(x)=f\{g(x)\}=f(y)=z$ • 定義域，値域，グラフ　• 一般に $f\circ g\fallingdotseq g\circ f$ (4) 逆関数 • f : X→Y の逆関係が関数のとき，f の逆関数といい f^{-1} で表わす。 • 定義域，値域，グラフの特徴 • $f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$ のとき，$f^{-1}=\{(y,x)\mid y=f(x)\}$ か，$f^{-1}=\{(x,y)\mid x=f(y)\}$　と表わせる。 • 1対1，onto のとき，一意に逆関数が存在する。 • 関係は関数に分割できる。 <例>　$y=x^2$　と $y=x^2$ ($x\geqq 0$)　の逆関係と逆関数
§ 4. いろいろな関数 (2h)	○ f : X→Y　のとき，X，Y を実数に限定して，いろいろな現象を関数的にとらえる能力を養う。 (1) 応用題　(2) 一次関数 (含・絶対値関数)　(3) 二次関数 〔以下　教科書により，二次関数とグラフ，分数関数，無理関数，指数関数，対数関数　を統一的に指導する。
演習・テスト	演　習 (2)　テスト (1)

II 指導の実践例 9

県立巻工業高等学校　米　山　　昭

数学 I において，ある程度，関数概念を明確にし，以後の関数教材を整備，統一して学習する

能力を養うために，上記のような指導体系をとったらどうかというのが主旨であり，実践例であるが，紙面の都合で，ここでは関数の§ 1.関数の考えについてのみ取り上げる。

1. 対象　　第1学年電子科2クラス（集合を指導して関数のグラフを指導する前）

2. 主題　　関数の考えをどのようにして把握させるか。

3. ねらいと問題点

関数は(1)一意対応になる関係，(2)順序対の集合，(3)対応の規則など極めて多面的なとらえ方ができるが，やはり写像を中心とした定義が妥当ではないかと思う。

しかし，その場合，(1)，(2)，(3)の統一体として関数概念を把握させること，そのことにより始めて，写像を中心とした定義がいかされ，より深く理解されると思う。そこで，(1)(2)(3)の結びつきを考慮して，関数を定義づけたいのが，ここでのねらいである。

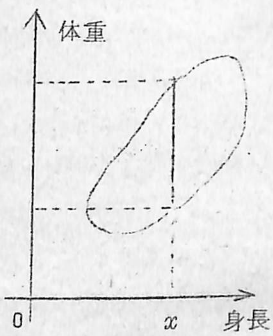
その場合，問題になるのは，具体的な順序対の集合と，抽象的な対応の規則をどのように関連づけて指導するか，また，どちらが生徒にとって容易であるかということである。

4. 指導内容

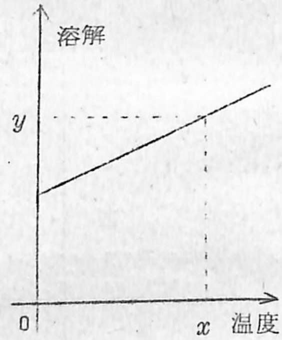
(1) 関係を順序対の集合としてとらえ，対応，グラフを通して考察してきたので，ある程度，関数の素地が養われている。そこで，関数の考えを次のように導入した。

<例1>

いま，あるクラスの生徒の身長（x）と体重（y）の関係をR_1，100gの水x℃のとき塩が$y\,g$溶解する関係をR_2とする。関係R_1，R_2は夫々右のようにグラフで表わせる。（ここでR_2は数回のデーターの平均値であることを付説しておく。）



（R_1のグラフ）



（R_2のグラフ）

例1より，あるxに対して，それに対応するyが「決定する」「1つに決まる」といえる関係はどれかを考えさせ，決定するといえるのはR_2の場合であることを確認する。

その結果，関係R_2のように，あるxに対して，それに対応するyが1つ決まる関係，即ち，一意対応になる関係を特に関数という。従って，関数は関係の一種であるから，次のように一般化できることをいい，整理する。

① 順序対の集合としての関数

集合Xの元xと集合Yの元yとで作られる順序対（x，y）の集合で，xにあるものを指定すると，yがただ一通りに決まるとき，この順序対の集合を関数という。

i.e. 関係の表現を用いて　$\{(x, y) \mid x — y,\ x \in X,\ y \in Y\}$　と表わせる。

ここで ＿＿ は一意対応となる関係を与える文である。

② 関数のグラフは，関係のように，直積集合の部分集合で，しかもその夫々の垂線がそのグラフと一点だけで交わる。

〔問題例〕　次の関係のうち，関数となるのはどれか。

(1)　$R = \{(2, 1)(3, 2)(4, 3)(5, 4)(6, 4)\}$

(2)　$H = \{(x, y) \mid x$の子供はyである。$\}$

(3)　$G = \{(x, y) \mid y^2 = x,\ x, y$は実数$\}$

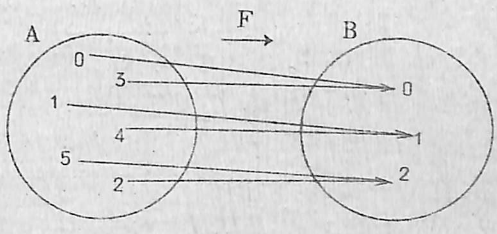
(4)

x	-1	0	1	2
y	1	0	-1	-2

(5)，(6)　はグラフ
(7)，(8)　は対応図
(9)，(10)　は文章　で与える。

(2) 順序対の集合から，対応の規則としての関数の理解をはかる。

<例2>　負でない5以下の整数に，これを3で割った余りを対応させる関係Fについて，



(イ)　Fを順序対の集合として表わすと

$F = \{(0, 0)(1, 1)(2, 2)(3, 0)$
$(4, 1)(5, 2)\}$　となる。

(ロ)　Fを対応図で表わすと右図のようになる。

(ハ)　Fをグラフで表わす。（略）

この関係Fは，定義域$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，値域$B = \{0, 1, 2\}$なる関数であることを意識させ，個々の元の対応に着目して，対応の規則としての関数を理解させた。

① (イ)(ロ)より関数Fは$0 \to 0$，$1 \to 1$，$2 \to 2$，$3 \to 0$，$4 \to 1$，$5 \to 2$に対応させる規則を与えている。即ち，Fは集合AからBへの一意対応の1つの規則である。

それを，$F ; A \to B$　とかき，「AからBへの関数F」という。これを個々の元では，$F ; 0 \to 0$，$F ; 1 \to 1$，……　$F ; 5 \to 2$　と書き，更に簡単に，$F(0) = 0$，$F(1) = 1$，……　$F(5) = 2$　と書く。また，5の関数値は2や$F(5)$　であるという。

② Fの定義域　D_F，　値域　R_F，　変数，関数値。

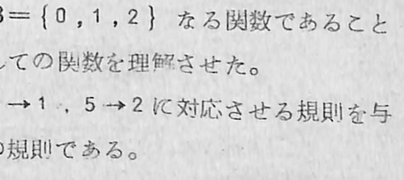
③ 関数の存在と関数記号

関数Fは，2つの集合の定義域と対応の規則が与えられれば指定されるので，対応の規則をf, g, h, φ, F, G　などで表わし，それをそのまま関数f……　という。

以上より，一般に，

④ 対応の規則としての関数

集合Xの任意の元xに，集合Yの元yが，ただ1通りに決まる対応の規則fがあるとき，このfをXからYへの関数といい，次のように表わす。



$f ; X \to Y$　　また　$X \ni x$に対し$y \in Y$として

$f\ ;\ x \longrightarrow y$　（ f は x を y へ写像する）

$f(x)=y$　（ y を x の像，x を y の原像）

- 本来，写像は，構造をもった集合Xから，構造をもつ集合Yへの一意対応のことであり，即関数であるが，ここでは，余り深入りしない。
- 関数 f が「を2倍して1加える」対応の規則であるとき，$f\ ;\ x \rightarrow 2x+1$，$f\ ;\ 2x \rightarrow 4x+1$，$f\ ;\ a+1 \rightarrow 2a+3$…… など，いろいろ表わせるが，最も規則がわかりやすいのはどれかを考えさせ，$f\ ;\ x \rightarrow \boxed{}$ の明確さを強調しておく。

⑤　順序対の集合と対応の規則の統一

関数 $f=\{(x,y) \mid x \text{——} y,\ x \in X,\ x \in Y\}$（順序対による表わし方）について，| の前者 (x,y) を強調すれば，順序対の集合としての性質が強いが，後者 x —— y を強調すれば，それがとりもなおさず対応の規則としての意味がいかされることを理解させ，x —— y から　$f\ ;\ x$ —— y　や $f(x)=y$（写像による表わし方）が生ずることを意識させる。

i.e.
$$\begin{aligned} f &= \{(x,y) \mid x \text{——} y\} \\ &= \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots\cdots\} \\ &= \{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)) \cdots\cdots\} \\ &= \{(x,y) \mid y=f(x)\} \quad \Longleftrightarrow \quad f\ ;\ x \text{——} y。\end{aligned}$$

〔問題例〕

1.　次の空らんをうめよ。

(1)　$f=\{(5,9),(7,3),(3,7),(8,4)\}$　のとき，

$f(5)=$____，$f(\quad)=3$，$f(13)=$____，$f(\quad)=0$，$D_f=\{\qquad\}$

(2)　$g=\{(x,y) \mid y=2x-1\}$　のとき，

$g(\sqrt{3}+1)=$____，$g(1/a)=$____，$g(\quad)=2a-3$，$g(\quad)=-1/8$，

$g(x)=3$ なる $x=$____

2.　$f(x)=x^2-3x$ のとき，$f\ ;\ x \rightarrow (\qquad)$，$f=\{(x,y) \mid (\qquad\qquad)\}$ と表わせる。

3.　次の関数の対応の規則を求めよ。

(1)(2)は順序対の集合で，(3)(4)は対応図で，(5)(6)はグラフで，(7)(8)は式で，(9)(10)は簡単な応用題で与えた。

5.　結果の考察

3の問題点に関連してここでは，関数を順序対の集合として展開した場合と対応の規則として展開した場合の理解度や，その2つを統一した立場で生徒が関数の考えが身についたかについて考察したいが，それら3つの立場で独立した問題の作成が極めて困難である。関数が常に，それらの兼ね合いで理解される性質であるからやむを得ぬが，実際に，いろいろなファクターが混入し

てしまい，はっきり区別した科学的，客観的な考察は信頼性の乏しいものとなり，事実上不可能であった。そこで，ここでは，関数を指導したあと，順序対の集合や対応の規則が生徒にどの程度理解されたか，また，どのように統一的にとらえているかということを，いくつかのテストを通して，それを１つの資料として掲げ，結果の考察としたい。

(1)　テスト問題と正答率

問 1.　実数上の関数fが「ある数をその数の２乗より３小さい数に対応する」規則であるとき，次の問に答えよ。

(1)　fを順序対による方法で表わせ。　(2)　fを写像による方法で表わせ。　(3)　$R_f=\{\quad\}$

(4)　$D_f=\{0, 1, 2\}$ のとき，fを次の方法で表わせ。

①　順序対の集合，　②　対応図，　③　グラフ

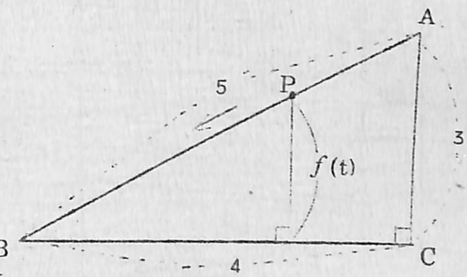
問 2.　５以上１０以下の正の整数nに対して，１でないnの最小約数pを対応させる対応の規則 $f; n \to p$　は関数となるか。もしなれば，D_f，R_f を求めよ。

問 3.　$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，$g(x)=x+2$　のとき，$f\circ g(x)=x$　なるxの値を求めよ。

問 4.　右の図のような直角三角形ＡＢＣがある。

点Ｐが頂点Ａを出発して，この三角形の周上を図の矢印の向きに，毎秒１の速さでまわっている。

出発後ｔ秒たったときの点Ｐと辺ＢＣとの距離を$f(t)$とするとき，次の問に答えよ。



(1)　$f(0)$　の値をかけ。

(2)　$0 \leqq t \leqq 5$のとき，$f(t)$をｔの式で表わせ。

(3)　$f(370)$　の値を求めよ。

問 5.　$f=\{(x, y) \mid 2x-y-3=0\}$，　$g; x \to 10x-3$　のとき，次の問に答えよ。

(1)　$f(x)=(\qquad)$　(2)　$D_g=\{x \mid 0 \leqq x \leqq 2\}$のとき，$R_g=\{\qquad\}$

(3)　$f\circ h=g$　となる関数hを求めよ。

問 6.　$f=\{(1, 2), (2, 4), (3, 7), (4, 10)\}$

x	2	7	10	4
$g(x)$	12	2	3	2

のとき，合成関数$f\circ g$を求めよ。

以上の問題に対する正答率は次の通りであった。

問題番号	1						2	3
小問番号	(1)	(2)	(3)	①	②	③		
正答率（％）	97	97	69	97	97	90	72	33

4			5			6	全体
(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)		
72	51	36	100	97	59	82	75.7

尚，問4は，全国工業高等数学Ⅰ標準テストの昭和44年4月（現2年生）に実施した問題でそのときの本校，全国の正答率は順に，81・23・40，60・20・32　であった。

(2) 生徒の感想からみたテストの結果

指導後，各項目について生徒にアンケートをとり，理解度の自己判断をさせ，その結果と(1)のテストの成績を比較したら，次の表のようであった。

関数の考えを			よくわかった	普通	余りわからず	順序対がよい	対応がよい	同程度
順序対の集合(A)			38 %	52	10			
対応の規則(B)			41 %	52	7	21 %	18	61
テストの平均点(1/100)		A	82.2	74.0	95.0			
		B	83.0	73.3	77.8	80.8	86.7	75.3
問題番号と正答率	2	A	87	60	75			
		B	75	70	67	88	57	71
	3	A	53	30	95			
		B	75	25	33	13	86	46
	4 (1)	A	67	70	95			
		B	75	65	95	75	85	67
	4 (2)	A	60	40	95			
		B	50	50	67	75	70	38
	4 (3)	A	47	20	50			
		B	31	30	67	63	29	30
	5の(3)	A	73	40	95			
		B	69	63	67	63	70	54
	6	A	80	80	95			
		B	88	60	95	75	98	80

（注）余りわからなかったと答えた生徒は，結果的に良い成績をとったが，その後，関数の表現や合成関数をやってからのテストなので，関数の考えだけのファクターではない。

また，該当人数が10％程度では，やはり信頼性に乏しいようである。

(3) 考　察

(1)(2)をもとにして，1つの解釈を施す。

① 順序対の集合と対応の規則（写像）についての理解では，特に有意差は認められなかった。生徒の感想の比率からみても，平均点からみても，ほぼ同じではっきりした差は出なかった。しかし，問2や問3のように，個々の問題についてみると，順序対の集合のわかりやすかった生徒と対応の規則がわかりやすかった生徒に差が認められるし，答案にもそれが表われている。

写像を強調すると，一意対応の判断は容易にできるが，定義域や値域にミスがあり，順序対を強調すると$f\circ g(x)$ は求められても，$=x$の解釈がはっきり把握されないきらいがあった。順序対の集合と対応の規則は，夫々一長一短があり，活用のドメーンがある。その後の指導で特にグラフに関する問題で平行移動や対称等では順序対の考えは有効的確であったと思う。

これらのことを逆にいえば，両方の立場から，具体例を活用しつつ指導しておくことは，可能であるしかつ，以後の展開に有効であると思う。

② 定義域，値域の考えがなかなか習慣にならない。

2つの集合があってはじめて関数の存在が論じられるわけであるが，対応の規則だけを強調すると，ベースになる集合を忘れてしまう。

問4の(3)の正答率が，特に対応の規則がわかりやすかったとした生徒にミスが目立ったが，定義域や値域を度外視して，(2)で求まった式に直接代入してしまう答案が多かった。また，この問題は，変化と変化の対応をとらえる周期関数の問題であり，関数指導のポイントの1つであるが，予期した効果があがらなかったし，対応の規則がわかりやすかったから正答率がよいとは限らないということがいえる。「応用問題を解くのが楽しくなった」という反面，「方程式や不等式では，その解き方さえ理解していれば，計算で求まるが，関数は計算よりも基礎となる表わし方や考え方が理解されなければならないので，いやであった。」という生徒の感想にも，考えることへの積極性の問題があろう。

大学入試にも，定義域や値域を無視できない問題が多くあるが，ブラックボックスで関数を指導するなど冷汗ものである。

③ 記号化に対する抵抗は殆んどなく，それによって概念形成がはばまれることはなかった。一番生徒が混乱したと思われるのは$f=$ と$f(x)=$ であったと思う。

以上，関数の考えについてだけ，一考を述べたが，関数指導はむしろその後における活用が主であり，これらの基礎をふまえて，初等関数等を統一して理解したり，functionalityを身につけることに大きな意義があるので，更に分析を続けていきたいと思う。

＜ 参考資料 ＞

- 算数教育の研究　1969・4　新潟大学教育学部　数学教室
- U.I.C.S.M　unit 5　Relations and Functions
- 改訂　中学校学習指導要領の展開　数学科編
- 集合・関係・関数　日本評論社
- 関数とその指導　高等学校編　日数教
- 数学教育革新のために　高等学校編　正田健次郎　著